

Θεωρία Ομάδων Σεπτέμβριος 2023

Θέμα 1 (2 Μόρια) Να βρεθούν όλοι οι αυτομορφισμοί $f: \mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_5$.

Θέμα 2 (2 Μόρια) Αν O μια ομάδα και Y υποομάδα της O , να δώσετε τον ορισμό της κανονικοποιούσας $No(Y)$ και να δείξετε ότι το πλήθος των συζυγών υποομάδων της Y δίνεται από το δείκτη $[O : No(Y)]$

Θέμα 3 (2 Μόρια)

(i) Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα Πεπερασμένων Αβελιανών Ομάδων.

(ii) Έστω O αβελιανή ομάδα με $|O| = m \cdot n$ με $m, n \in \mathbb{N}$ και $(m, n) = 1$. Αν

$$A = \{a \in O : a^m = 1\} \text{ και } B = \{b \in O : b^n = 1\},$$

δείξτε ότι $O \cong A \times B$.

Θέμα 4 (2 Μόρια) Δείξτε ότι η Σ_3 είναι ημικεντρικό γινόμενο υποομάδων της.

Θέμα 5 (1 Μόριο) Να βρείτε δυο διαφορετικές συνθετικές σειρές της \mathbb{Z}_{24} και να δείξετε ότι είναι ισόμορφες.

Θέμα 6 (2 Μόρια) Να βρείτε όλες τις μη ισόμορφες ομάδες τάξης 1225.